

Секция 4

МЕХАНИКА В РЕШЕНИИ ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

УДК 624.131

DOI: 10.17213/mgvgif/2026-5-385-405

НЮАНСЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА СНИЖЕНИЯ ПРОЧНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТУ УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ

А. Н. Богомолов¹, О. А. Богомолова², С. А. Богомолов³, А. В. Редин⁴

¹ООО «Научно-проектное экспертно-консультационное предприятие «ОиФ»»,
г. Новосибирск, Россия

²Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Россия,

³Национальный исследовательский Московский государственный строительный
университет, Москва, Россия,

⁴АО «Черномортранснефть», База производственного обслуживания, Участок геоло-
гических и инженерно-изыскательских работ, г. Новороссийск, Россия

Аннотация. Рассматриваются вопросы, возникающие при внимательном знакомстве с методом снижения прочности SRM в контексте его использования совместно МКЭ при расчете устойчивости откосов и склонов. Показано, что существенное влияние на результаты вычислений оказывают размеры МКЭ-схем, степень их дискретизации, изменение численных значений переменных расчетных параметров, в числе которых прочностные и деформационные свойства слагающего грунта. Показано, что прочностные и деформационные свойства грунта в явной или неявной форме находятся между собой во взаимосвязи – изменение одного из них неминуемо влечет за собой изменение других. Процедура SRM и предполагает изменение прочностных свойств грунта и постепенное доведение грунтового массива до предельного состояния. Величина коэффициента уменьшения прочностных свойств F_{sr} , которая определяет величину коэффициента запаса устойчивости F_{st} , может достигать при проведении процедуры SRM величины гораздо большей единицы, из чего следует, что в конечном итоге будет рассматриваться некий гипотетический объект, сохраняющий начальные геометрические параметры, но с другими физико-механическими свойствами слагающего грунта. Изменение (увеличение или уменьшение) численных значений прочностных характеристик (сцепления и тангенса угла внутреннего трения) слагающего грунта повлечет за собой изменение жесткости исследуемого массива – численных значений коэффициента бокового давления и модуля деформации, что изменит напряженно-деформированное состояние приоткосной области и, следовательно, конечный результат расчета – величину K_{st} . По всей видимости, степень влияния перечисленных выше факторов на результаты расчета устойчивости откосов при помощи SRM не была до сих пор исследована и оценена, поэтому необходимо провести специальные исследования и, если степень этого влияния будет существенной, то установить процедуры, обеспечивающие максимальную достоверность результатов, получаемых при использовании SRM.

Ключевые слова: расчет устойчивости откосов, метод снижения прочности, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, физико-механические свойства грунта, жесткость грунтового массива, достоверность результатов вычислений

NUANCES OF USING THE STRENGTH REDUCTION METHOD FOR SLOPE STABILITY ANALYSIS

A. N. Bogomolov¹, O. A. Bogomolova², S. A. Bogomolov³, A. V. Redin⁴

¹LLC «Scientific and Design Expert and Consulting Enterprise "OiF"», Novosibirsk, Russia

²Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia

³Moscow State University of Civil Engineering (National Research University),
Moscow, Russia

⁴JSC «Chernomortransneft», Production Service Base, Geological and Engineering Survey
Department, Novorossiysk, Russia

Anotation. *The article examines issues that arise upon a detailed examination of the Strength Reduction Method (SRM) in the context of its use in conjunction with the Finite Element Method (FEM) for slope stability analysis. It is shown that the size of the FEM schemes, the degree of their discretization, and changes in the numerical values of variable calculation parameters, including the strength and deformation properties of the constituent soil, have a significant impact on the calculation results. It is demonstrated that the strength and deformation properties of the soil are interrelated, either explicitly or implicitly – a change in one inevitably leads to changes in the others. The SRM procedure involves altering the strength properties of the soil and gradually bringing the soil mass to a limit state. The value of the strength reduction factor F_{sr} , which determines the factor of safety F_{st} , can reach values much greater than unity during the SRM procedure. This implies that, ultimately, a hypothetical object is being considered, one that retains its initial geometric parameters but possesses different physical and mechanical properties of the constituent soil. Changing (increasing or decreasing) the numerical values of the strength characteristics (cohesion and the tangent of the internal friction angle) of the constituent soil will lead to a change in the stiffness of the studied massif – specifically, the numerical values of the lateral earth pressure coefficient and the deformation modulus. This, in turn, alters the stress-strain state of the slope region and, consequently, the final calculation result – the value of K_{st} . Apparently, the degree of influence of the aforementioned factors on the results of slope stability calculations using SRM has not yet been thoroughly investigated and assessed. Therefore, it is necessary to conduct specific research and, if this influence is significant, to establish procedures that ensure the maximum reliability of results obtained using SRM.*

Keywords: *slope stability analysis, shear strength reduction method, finite element method, stress-strain state, physical and mechanical properties of soil, soil mass stiffness, reliability of calculation results*

Введение

В настоящее время в расчетной практике при решении задач об устойчивости откосов и склонов достаточно часто используется метод снижения прочности SRM, который формализован в таких вычислительных комплексах как *Plaxis*, *GEO5*, *Phase2*, *FLAC*, *GTS NX*. Для определения напряженно-деформированного состояния здесь используются метод конечных элементов FEM или метод конечных разностей FDM.

Идея *SRM* принадлежит советскому ученому проф. Р. Р. Чугвеву, который выдвинул ее еще в 30-х гг. прошлого века [1]. Суть этой идеи заключается в «доведении действительного отсека обрушения до состояния предельного равновесия» [2–4]. Эта цель может быть достигнута двумя способами: 1) при постоянных значениях прочностных свойств слагающего грунта (угла внутреннего трения φ и сцепления c) постепенно в одно и то же количество раз R увеличивать интенсивность внешнего воздействия (если откос свободен от внешних нагрузок — это силы гравитации); 2) при постоянных нагрузках таким же образом уменьшать (увеличивать) расчетные значения $\operatorname{tg}\varphi$ и c :

$$c_r = \frac{c}{R}; \quad \operatorname{tg}\varphi_r = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{R}, \quad (1)$$

до тех пор, пока в каждой точке линии скольжения не будет выполняться условие прочности Кулона [3, 4], которое можно представить в виде

$$\frac{\sigma_n \operatorname{tg}\varphi + c}{\sigma_n \operatorname{tg}\varphi_r + c_r} = 1. \quad (2)$$

Численное значение понижающего коэффициента R , при котором будет выполняться условие (2), будет определять величину коэффициента запаса устойчивости.

Отметим, что второй способ доведения откоса до предельного состояния может быть использован только в случае, когда отсутствуют внешние нагрузки и откос однороден. Только тогда напряжения в точках приоткосной области будут изменяться прямо пропорционально изменению удельного веса γ слагающего грунта, то есть интенсивности гравитационной нагрузки.

Используя идею Р. Р. Чугаева, О. С. Зенкевич и соавторы [5] ввели термины «коэффициент уменьшения» как коэффициента безопасности (устойчивости, стабильности) откоса ($F_{st} = K$), и «коэффициент уменьшения прочности на сдвиг» ($F_{sr} = R$) — как отношение максимальной прочности на сдвиг к реальному напряжению сдвига, создаваемому внешними нагрузками (см. формулы (1), (2)). Количественная оценка степени устойчивости проводится при помощи расчетов тем или иным методом. Вычислительный цикл завершается на этапе, когда выполнено условие (2). Если предположить, что во всех точках какой-либо кривой на определенном этапе расчета состояние предельного равновесия наступило одновременно, то эта линия будет определять положение и форму предельной линии скольжения, а величина R будет определять численное значение коэффициента запаса устойчивости. Однако, такое событие даже теоретически невозможно — в однородном и изотропном откосе поля компонент напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} не являются однородными и, следовательно, коэффициенты запаса устойчивости, вычисленные даже для соседних точек, будут отличаться друг от друга по величине.

В связи с выше сказанным, возникает проблема фиксации момента возникновения линии скольжения, для которой $K \leq 1$, то есть происходит срыв призмы скольжения, ее движение вдоль линии скольжения и, как следствие, разрушение откоса. Начало этого процесса может быть зафиксировано на основе нескольких критериев [6]: 1) отсутствие на некотором этапе расчета сходимости итерационного процесса; 2) возникновение лавинообразного роста деформаций сдвига; 3) резкий рост объема области пластических деформаций; 4) «выполаживание» графической зависимости между смещением контрольной точки, расположенной на предполагаемой призме скольжения, и величиной коэффициента уменьшения прочности R . По всей видимости, последний критерий используется чаще [7–9]. Рассмотрим этот критерий.

Согласно теории прочности Кулона–Мора [3, 4] пластическая деформация (фактическое разрушение) происходит в виде сдвига по некоторой площадке, где сопротивление сдвиговым усилиям оказывают силы трения и сцепления, являющиеся функциями прочностных свойств грунта и напряженного состояния грунтового массива, которое может быть оценено, например, величинами главных напряжений σ_1 и σ_3 .

Дункан и Чанг [7] для этих условий предложили гиперболическую зависимость величины осевой деформации от численного значения понижающего коэффициента R :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{E_i \left[1 - \frac{R f(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi_r)}{(2c_r \cos \varphi_r + 2\sigma_3 \sin \varphi_r)} \right]}, \quad (3)$$

где ε – осевая деформация; E_i – начальный касательный модуль упругости [8].

Кривые зависимости вида $R = f(\varepsilon)$ для частного случая, рассмотренного в [8], приведены на рис. 1.

Вычисляя значения ε по формуле (3) для различных величин R , строят кривые, аналогичные тем, что изображены на рис. 1, принимая при этом значения ε в контрольной точке, которая непременно должна находиться на потенциально возможной призме скольжения (разрушения). Лавинообразный, то есть при практически не меняющейся величине R , рост значения ε ($\varepsilon \rightarrow \infty$) означает, что вдоль линии скольжения возникли существенные деформации сдвига, вызвавшие движение (скольжение) призмы обрушения вдоль этой линии. При этом кривая зависимости вида $R = f(\varepsilon)$ будет резко выполаживаться, принимая положение, близкое к горизонтальному (см. рис. 1). Величина понижающего коэффициента R , при которой возникнут эти эффекты, определит численное значение коэффициента запаса устойчивости (стабильности) F_{st} .

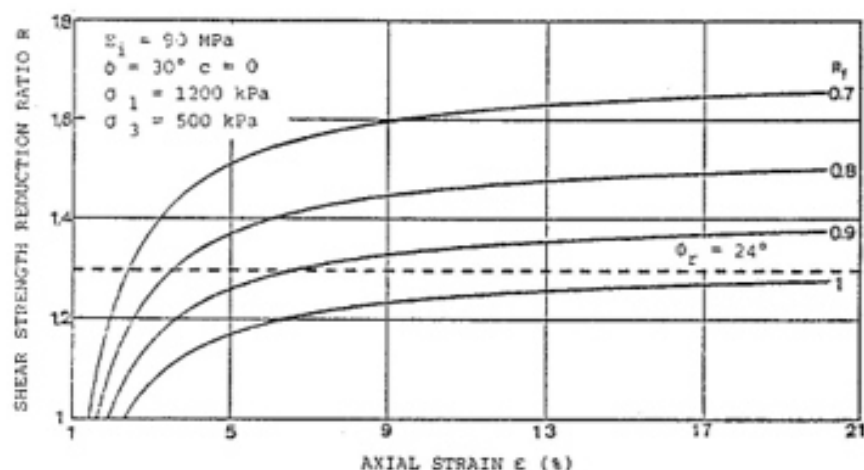


Рис. 1. Кривые зависимости вида $R = f(\varepsilon)$ [8]

Как отмечают многие исследователи совместное использование *SRM* и *МКЭ* обладает существенными преимуществами перед классическими методами расчета устойчивости [10–12]: может использоваться для откосов сложной геометрической формы и неоднородного геологического строения, нетривиальных граничных условий и условий нагружения; не требуется делать допущений о положении и форме наиболее вероятной линии скольжения — они определяются непосредственно во время вычислительного процесса; нет нужды разбивать призму скольжения на отдельные блоки и принимать гипотезы о схеме взаимодействия между ними.

Аналогичными достоинствами обладает и метод расчета устойчивости откосов и склонов, основанный на анализе напряженного состояния приоткосной области при помощи *МКЭ* и методов теории функций комплексного переменного (*МТФКП*, *TFCVM*) [13–15], при этом *TFCVM* может быть использован только для анализа напряженного состояния однородных откосов. Ниже проведено сопоставление результатов расчета устойчивости откосов, полученных при использовании различных модификаций *SRM*, с результатами, полученными при помощи [13–15], для тех же объектов. Все рассмотренные ниже примеры взяты из научных публикаций, находящихся в свободном доступе в интернете.

Материалы и методы

1. Сравнение результатов расчетов коэффициента запаса устойчивости

Пример 1. В работе [16] приведены результаты расчета методом *SRM* однородного (двухслойного, но со слоями, наделенными одинаковыми физико-механическими свойствами ($c_1 = c_2$; $\varphi_1 = \varphi_2$; $E_1 = E_2$; $\xi_1 = \xi_2$)) откоса, расчетная схема которого приведена на рис. 2. Данные о величине

модуля деформации и коэффициента бокового давления в статье не приводятся, а численные значения c и φ слагающего грунта приведены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что вычисления выполнены для откосов с углами $\beta = 25^\circ; 30^\circ; 45^\circ$ и высотой $H = 20$ м при этом $\varphi = 25^\circ = \text{const}$, а сцепление последовательно принимает значения $c = 20; 15; 10; 5$ кПа, то есть выполнено 12 вариантов расчетов.

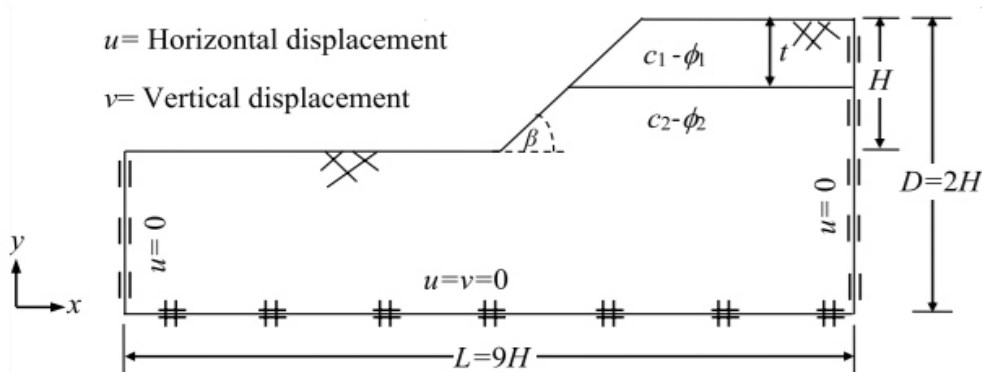


Рис. 2. Принципиальная схема и граничные условия двухслойного грунтового откоса (перевод Google) [16]

Таблица 1. Нижние и верхние границы значений K_{st} для различных однородных склонов, вычисленных при помощи SRM

φ	c , кПа	$\beta = 25^\circ$	$\beta = 35^\circ$	$\beta = 45^\circ$
25°	20	1,687(1,695)	1,292(1,303)	1,048(1,058)
	15	1,560(1,566)	1,177(1,187)	0,940(0,951)
	10	1,419(1,425)	1,050(1,060)	0,827(0,831)
	5	1,258(1,263)	0,904(0,913)	0,692(0,698)

Если проводится расчет устойчивости однородного откоса, то величина модуля деформации слагающего грунта не оказывает влияния на численное значение коэффициента запаса устойчивости, а вот величина коэффициента бокового давления ξ_0 , напротив, влияет на распределение напряжений в приоткосной области и, следовательно, от его величины будет зависеть величина коэффициента запаса устойчивости K_{st} . В связи с этим, для каждого из упомянутых выше двенадцати вариантов расчета, методом [13–15], формализованным в компьютерной программе [17], вычислены величины K_{st} при значениях коэффициента бокового давления $\xi_0 = 0,4; 0,6; 0,75; 0,9$.

На рис. 3 в качестве примера изображены линии скольжения в однородных откосах при $\beta = 45^\circ$; $\varphi = 25^\circ$ и четырех значениях величины удельного сцепления, которые указаны непосредственно на соответствующих рисунках. Результаты вычислений помещены в табл. 2, помимо которых в этой таблице приведены средние арифметические значения верхних и нижних граничных значений $K_{st} - K_{cp}$ [16, табл. 1]

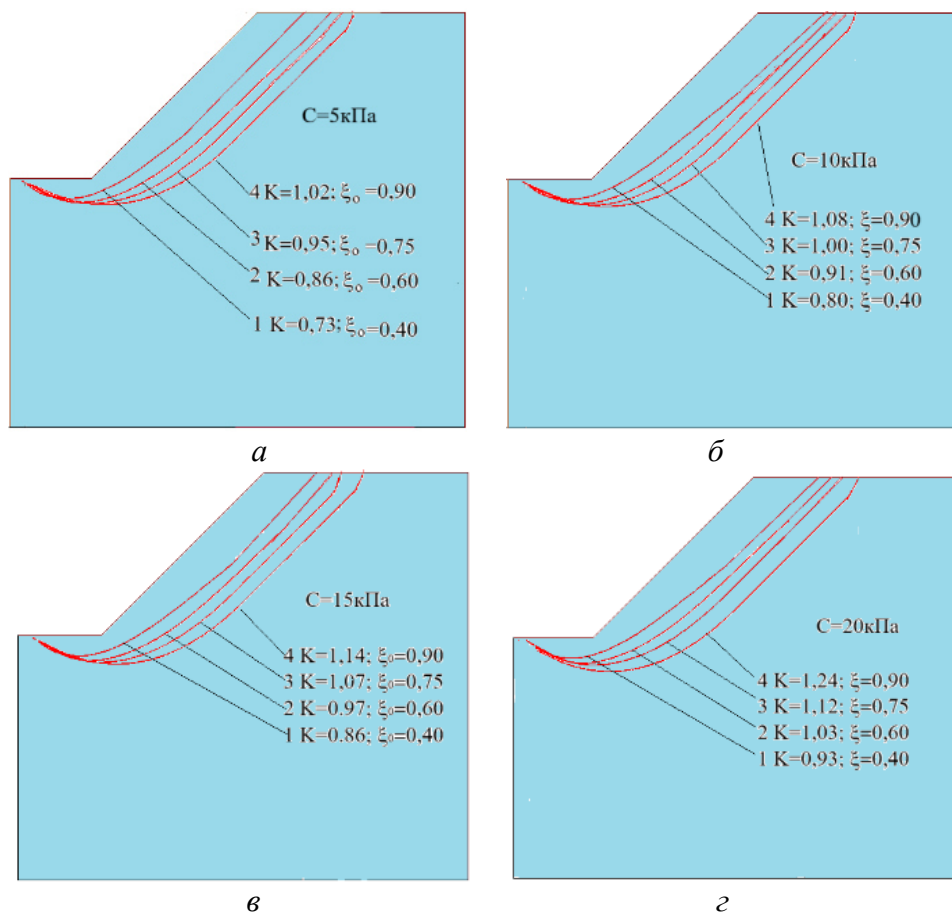


Рис. 3. Линии скольжения в откосах при $\beta = 45^\circ$, $\varphi = 25^\circ$, четырех значениях $\xi_0 = 0,4; 0,6; 0,75; 0,9$ и четырех значениях удельного сцепления $c = 5$ кПа (*a*); $c = 10$ кПа (*б*); $c = 15$ кПа (*в*) и $c = 20$ кПа (*г*)

Таблица 2. Численные значения коэффициентов запаса устойчивости, на основании [13–15]

β	с, кПа	Коэффициент бокового давления ξ_0				$K_{ср}$
		0,4	0,6	0,75	0,9	
		Коэффициент запаса устойчивости K_{st}				
25°	5	1,21	1,45	1,59	1,64	1,261
	10	1,30	1,47	1,59	1,64	1,422
	15	1,43	1,57	1,67	1,72	1,563
	20	1,54	1,72	1,84	1,85	1,691
35°	5	1,13	1,04	0,96	0,84	0,909
	10	1,18	1,09	1,01	0,89	1,055
	15	1,25	1,16	1,08	0,97	1,182
	20	1,31	1,31	1,16	1,08	1,300
45°	5	1,02	0,95	0,86	0,73	0,695
	10	1,08	1,00	0,91	0,80	0,829
	15	1,14	1,07	0,97	0,86	0,946
	20	1,24	1,12	1,03	0,93	1,053

Для удобства анализа данных, приведенных в табл. 1, на ее основе построены графические зависимости вида $K_{st} = f(c)$, изображенные на рис. 4.

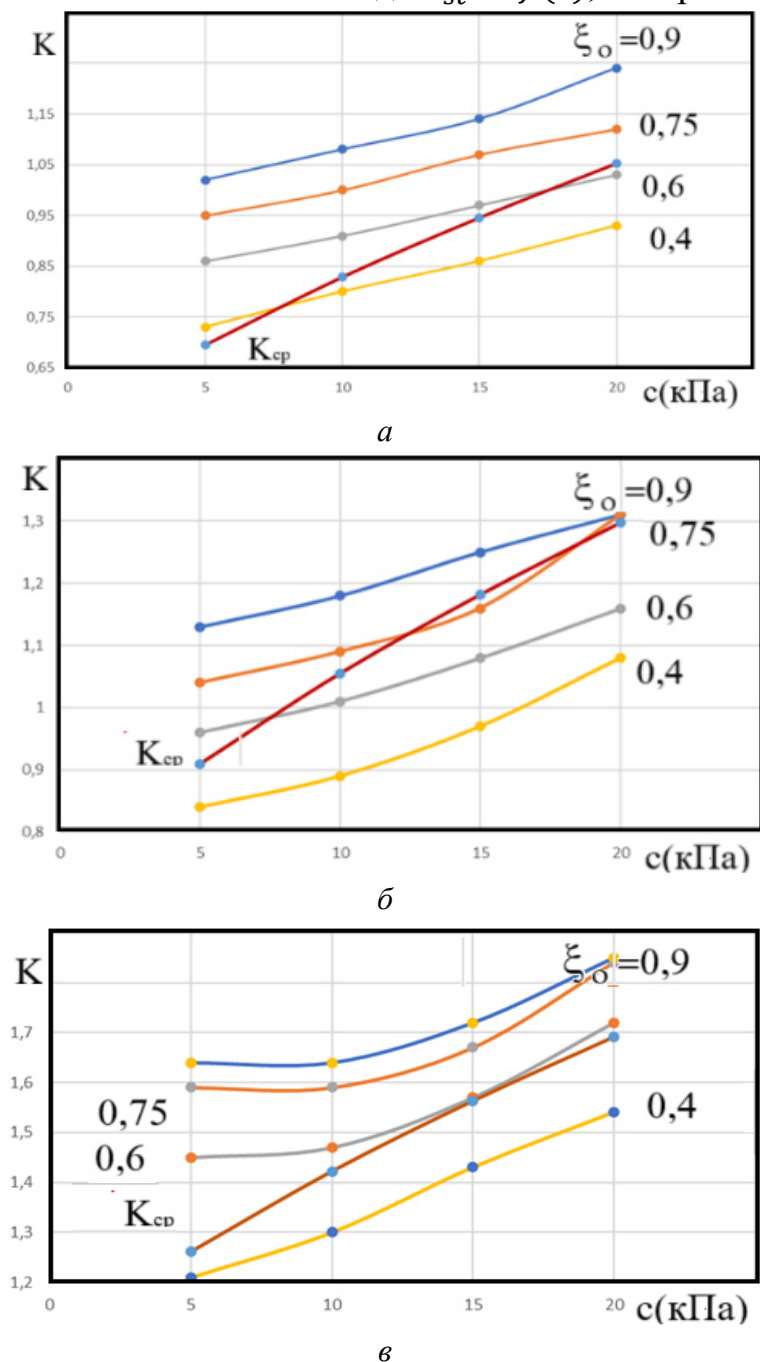


Рис. 4. Графические зависимости вида $K_{st} = f(c)$, построенные на основе данных, приведенных в табл. 2

Совместный анализ данных, приведенных в табл. 2, и кривых, изображенных на рис. 4, показывает, что численные значения коэффициентов запаса устойчивости, приведенные в работе [16] находятся внутри интервалов изменения численных значений K_{st} , вычисленных на основании [13–15] при $0,4 \leq \xi_0 \leq 0,9$.

Пример 2. В работе [19] проведено сопоставление результатов расчета устойчивости однородного откоса, выполненного упрощенным методом Бишопа (*SMB*) [10], относящегося к категории методов *FAM*, использующих гипотезу о круглоцилиндрической форме линии скольжения, и методом снижения прочности *SRM*, формализованного в «*ACADS*, разработанной Австралийской компьютерной ассоциацией в 1987 году» (цитируется по работе [19] в переводе *Google*).

На рис. 5 приведены изображение (с указанием размеров) расчетной схемы (а) и сами расчетные схемы с дискретизацией на конечные элементы и указанием положения тестовых точек *SRM* (б; в), а также расчетная схема МКЭ, сгенерированная в оболочке КП *FEA* [17] (г).

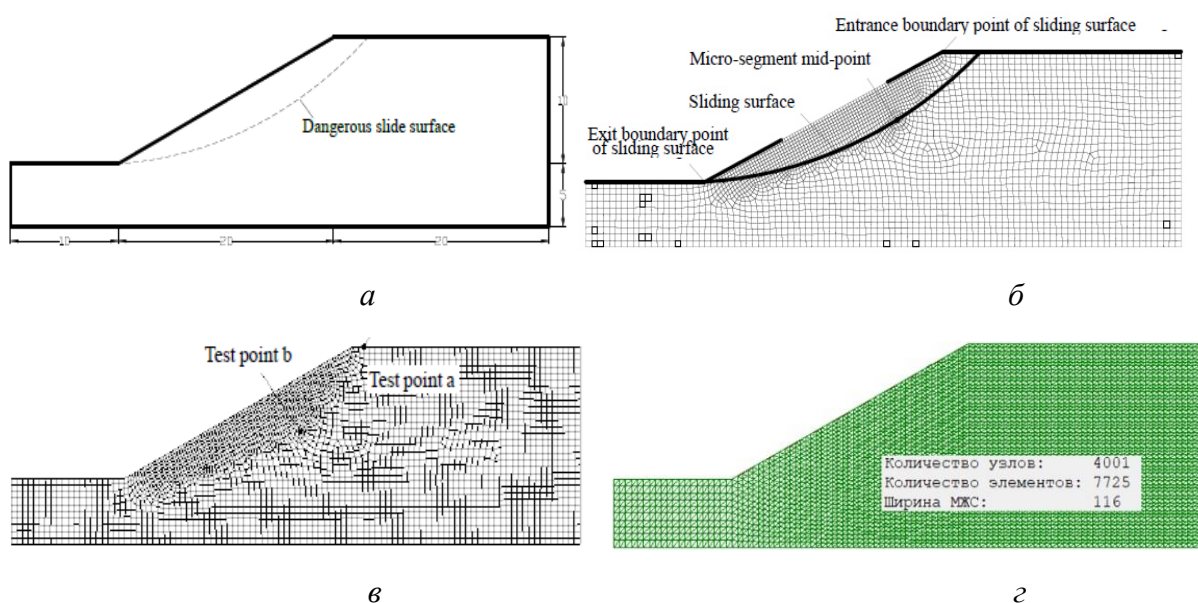


Рис 5. Размеры расчетной схемы (а), дискретизация расчетной схемы на КЭ (б), положение тестовых точек *SRM* на *PC* (в) и расчетная схема МКЭ, сгенерированная в среде КП *FEA* [17] (г) (рис. а; б; в; г цитируются по работе [19])

Table 1. Mechanical parameters for the examined case

Natural density	Deformation modulus	Poisson ratio	Shear strength	
γ (kN·m ³)	E (MPa)	μ	c (kPa)	φ (°)
20.0	10.0	0.25	3.0	19.6

Table 2. Total results for the examined

Factor of safety			Factor of safety was obtained through determinant procedure		
Mean	Min	Max	Donald	EMU	Fredlud
0.991	0.940	1.080	1.000	1.000	0.990

Рис. 6. Численные значения физико-механических свойств слагающих грунтов и результаты расчетов (цитируется по работе [19])

На рис. 6 представлены таблицы [19], в которых приведены численные значения физико-механических свойств, составляющих исследуемый откос грунтов (Table 1) и результаты, выполненных авторами [19], расчетов (Table 2).

Расчетная схема МКЭ, используемая в [19], состоит из 2938 конечных четырехугольных элементов и используется для определения напряженного состояния исследуемой области как при расчете методами *FAM* и *SRM*. Если учесть, что наша конечно-элементная схема состоит из 7725, но треугольных элементов (см. рис. 5з), то степень дискретизации расчетных схем можно считать практически одинаковой. В работе [19] сказано, что при расчете методом Бишопа [10] рассмотрено 6486 потенциально возможных линий скольжения при этом «минимальный коэффициент запаса прочности равен 1,011146» [19].

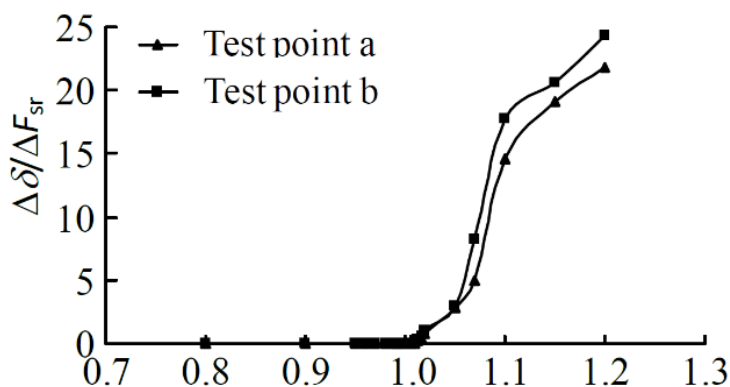


Рис. 7. Графические зависимости вида $R = f(\Delta\delta/\Delta F_{sr})$, построенные для двух тестовых точек *a* и *b*

При проведении расчета устойчивости откоса методом *SRM* построены графические зависимости $R = f(\Delta\delta/\Delta F_{sr})$ для двух тестовых точек *a* и *b* (см. рис. 5в), по которым определен момент «срыва» призмы скольжения – переход откоса в предельное состояние. По словам авторов [19] «склон может скользить вдоль этой области, и положение, и форма поверхности скольжения определяются путем привязки области и коэффициента запаса прочности, когда он равен 1,016» (цитируется по [19], перевод *Google*). Таким образом, величина коэффициента запаса устойчивости (прочности), вычисленная методом *SMR*, равна $K_{st} = 1,016$. Видно, что оба коэффициента запаса устойчивости практически совпадают.

Нами, как и при рассмотрении примера 1, выполнен детерминированный расчет устойчивости однородного откоса, описанного в работе [19], при помощи компьютерной программы *FEA* [17]. При этом построение наиболее вероятной линии скольжения проведено из той же точки, что в работе [19]. В результате расчетов установлено, что величина коэффициента запаса устойчивости оказалась равной $K_{st}^{[17]} = 1,13$.

Таким образом, численные значения коэффициентов запаса устойчивости, вычисленные на основе метода *SMR* и на основе анализа напряженного состояния грунтового массива [14, 15] для примера, рассмотренного в [19], соответственно равны $K_{st}^{SRM}=1,016$ и $K_{st}^{[17]}=1,13$, то есть отличаются всего лишь на 10,088 %. При этом соответствующие линии скольжения имеют одинаковую локализацию, но существенным образом отличаются формой.

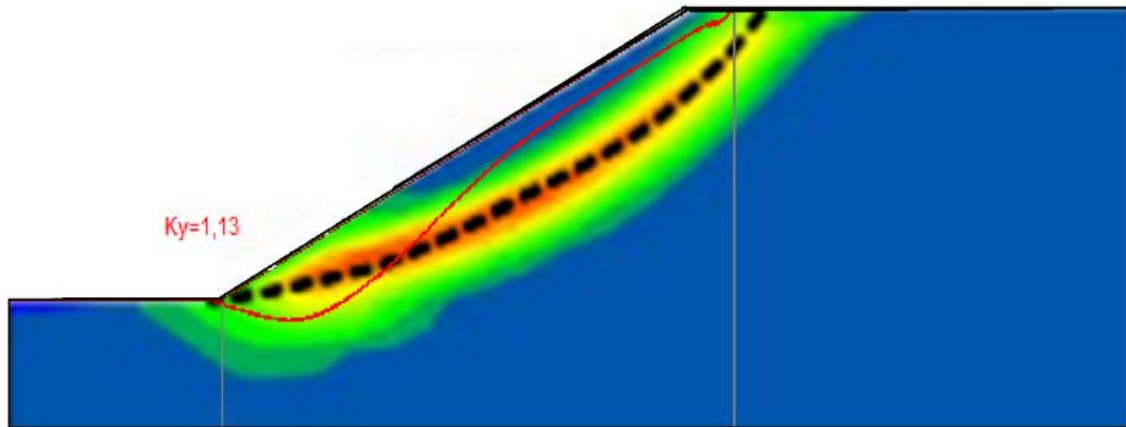


Рис. 8. Наложение линии скольжения, полученной по результатам расчетов в работе [19], и наиболее вероятной линии скольжения, полученной для условий работы [19] при расчете в оболочке компьютерной программы *FEA* [17]

Пример 3. Дано: однородный откос высотой $H = 10$ м и углом заложения $\beta = 20^\circ$, сложенный однородным суглинком: $e = 0,65$, $0,25 \leq I_L \leq 0,5$, $\gamma = 18,9$ КН/м³, $c = 28$ кПа, $\phi = 22^\circ$, $E_o = 22$ МПа, $\xi_o = 0,45$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0,31$). Грунт является нормально уплотненным, коэффициент переуплотнения $OCR = 1$.

Определить: величину коэффициента запаса устойчивости откоса:

1. При помощи компьютерной программы *FEA* [17] при постоянном значении коэффициента бокового давления $\xi_o = 0,45$.

2. При совместном использовании КП *FEA* и процедуры *SRM*, то есть, на каждом этапе снижения прочностных характеристик пересчитывать величину коэффициента бокового давления по формулам В. А. Флорина [21] и Р. W. Майне, Ф. Н. Kulhawy [26] определить (аналогично [1]) такое значение $R = K_{st}$, при котором откос потеряет устойчивость.

На рис. 9 приведены расчетная схема откоса с указанием ее параметров, наиболее вероятная линия скольжения, площадки наиболее вероятного сдвига, которые построены в оболочке КП *FEA* [17], и результат детерминированного (в смысле постоянства величины $\xi_o = 0,45$) расчета $K_{stc} = 1,27$.

При проведении второй серии вычислений оказалось, что форма и положение линий скольжения при перерасчете с измененными ξ_o меняются не значительно и их нет смысла приводить статье.

В табл. 3 приведены результаты описанных выше расчетов и численные значения переменных расчетных параметров, которые используются при решении задачи в среде компьютерной программы *FEA* [17].

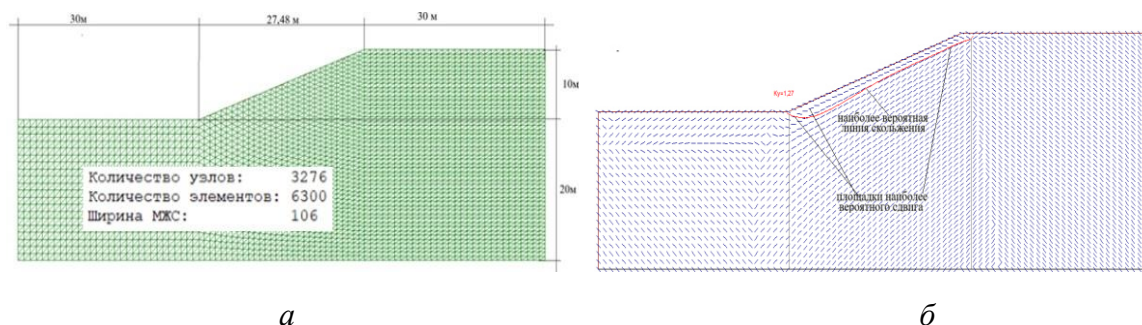


Рис. 9. Расчетная схема откоса в оболочке программы *FEA* (а), площадки наиболее вероятного сдвига, наиболее вероятная линия скольжения и соответствующее ей значение коэффициента запаса устойчивости (б)

Таблица 3. Результаты выполненных расчетов

R	$\operatorname{tg} \varphi$	φ	$c/\gamma, \text{ Н}$	$\xi_{o[26]}$	$\xi_{o[21]}$	K_{stc}	$K_{st[26]}$	$K_{st[21]}$
1,00	0,4040	22,00	0,148	0,4500	0,6201	1,27	1,28	1,38
1,05	0,3848	21,05	0,141	0,4724	0,6908	1,21	1,22	1,34
1,10	0,3673	20,16	0,1345	0,4874	0,6553	1,16	1,18	1,28
1,15	0,3513	19,35	0,1287	0,5022	0,6687	1,11	1,14	1,24
1,20	0,3367	18,60	0,1233	0,5163	0,6810	1,06	1,1	1,20
1,25	0,3232	17,90	0,1184	0,5298	0,6926	1,01	1,06	1,16
1,30	0,3108	17,20	0,1138	0,5436	0,7043	0,95	1,03	1,12
1,32	0,3061	17,01	0,1121	0,5475	0,7060	0,93	1,01	1,11
1,35	0,2992	16,55	0,1096	0,5566	0,7151	0,90	0,97	1,09
1,40	0,2886	16,10	0,1057	0,5658	0,7227	0,87	0,94	1,06
1,50	0,2693	15,07	0,0987	0,5873	0,7399	0,83	0,90	1,00

В последних трех столбцах таблицы приведены величины коэффициентов запаса устойчивости K_{stc} , вычисленные при $\xi_o = 0,45 = \text{const}$, и при значениях коэффициента бокового давления грунта, которые пересчитаны по мере уменьшения величины φ по формуле Р. W. Mayne, F. H. Kulhawy [26] $K_{st[26]}$, рекомендованной для связных грунтов, и формуле В. А. Флорина [21], что рекомендовано в [25]:

$$\xi_o^{oc} = (1 - \sin \varphi) OCR^{\sin \varphi}. \quad (4)$$

Учитывая, что по условию слагающий грунт не является переуплотненным, отметим, что формула (4) вырождается в известную формулу J. Яку [20] для нормально уплотненных грунтов при коэффициенте переуплотнения $OCR = 1$.

На рис. 10 приведены кривые зависимостей $K = f(R)$: K_{stc} – соответствует значению $\xi_0 = 0,45 = \text{const}$, $K_{st[26]}$ – значению ξ_0 , пересчитанному по формуле Р. W. Mayne, F. H. Kulhawy [26], а $K_{st[21]}$ – пересчитанному по формуле В.А.Флорина [21]. Каждая из этих кривых с погрешностью, не превышающей 4%, аппроксимируется прямой линией.

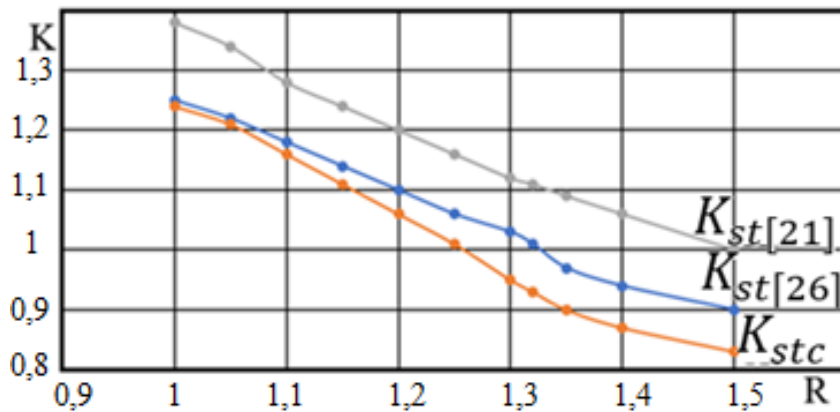


Рис. 10. Кривые зависимостей $K = f(R)$:

K_{stc} – соответствует значению $\xi_0 = 0,45 = \text{const}$, $K_{st[26]}$ – значению ξ_0 , пересчитанному по формуле Mayne P.W., Kulhawy F.H. [26], а $K_{st[21]}$ – пересчитанному по формуле В. А. Флорина [21]

Согласно *SRM* численные значения коэффициентов запаса устойчивости равны величинам R , при которых откос приходит в предельное равновесие, то есть $K=1$. Анализ этих кривых показывает, что $K_{stc}=1,2574$, $K_{st[26]} = R_{[26]}=1,3253$, $K_{st[21]} = R_{[21]}=1,5$. Не трудно видеть, что $K_{stc} < K_{st[26]} < K_{st[21]}$ и разница между K_{stc} и $K_{st[26]}$ составляет 5,4 %, а между K_{stc} и $K_{st[21]}$ — 19,29 %. Таким образом, если учесть изменение жесткости грунтового массива, обусловленное изменением только коэффициента бокового давления грунта, то разница численных значений коэффициентов запаса устойчивости, вычисляемых при помощи КП *FEA*, по сравнению со случаем расчета при фиксированном значении ξ_0 составляет 5,4 % и 19,29 % в зависимости от формулы, по которой производится перерасчета величины коэффициента бокового давления.

2. Влияние численных значений переменных расчетных параметров на результаты расчета методом снижения прочности (*SMR*)

В работе [18] приведены результаты расчетов, выполненных с целью определить степень влияния численных значений расчетных переменных параметров: количества элементов расчетной схемы n , угла внутреннего трения φ , сцепления c , модуля упругости E и коэффициента Пуассона μ [18]. Соответствующие графические зависимости приведены на рис. 11. Анализ этих кривых показывает, что степень дискретизации расчетной схемы n , численные значения сцепления c и угла внутреннего трения φ оказывают

существенное влияние на результаты вычисления величины K_{st} всеми рассмотренными методами, кроме метода Бишопа (*SBM*). Изменение численных значений коэффициента Пуассона μ (или коэффициента бокового давления ξ_0) и модуля упругости E (или модуля общей деформации E_0) практически не влияют на получаемые методами *FAM* и *SRM* значения коэффициентов запаса устойчивости K_{st} .

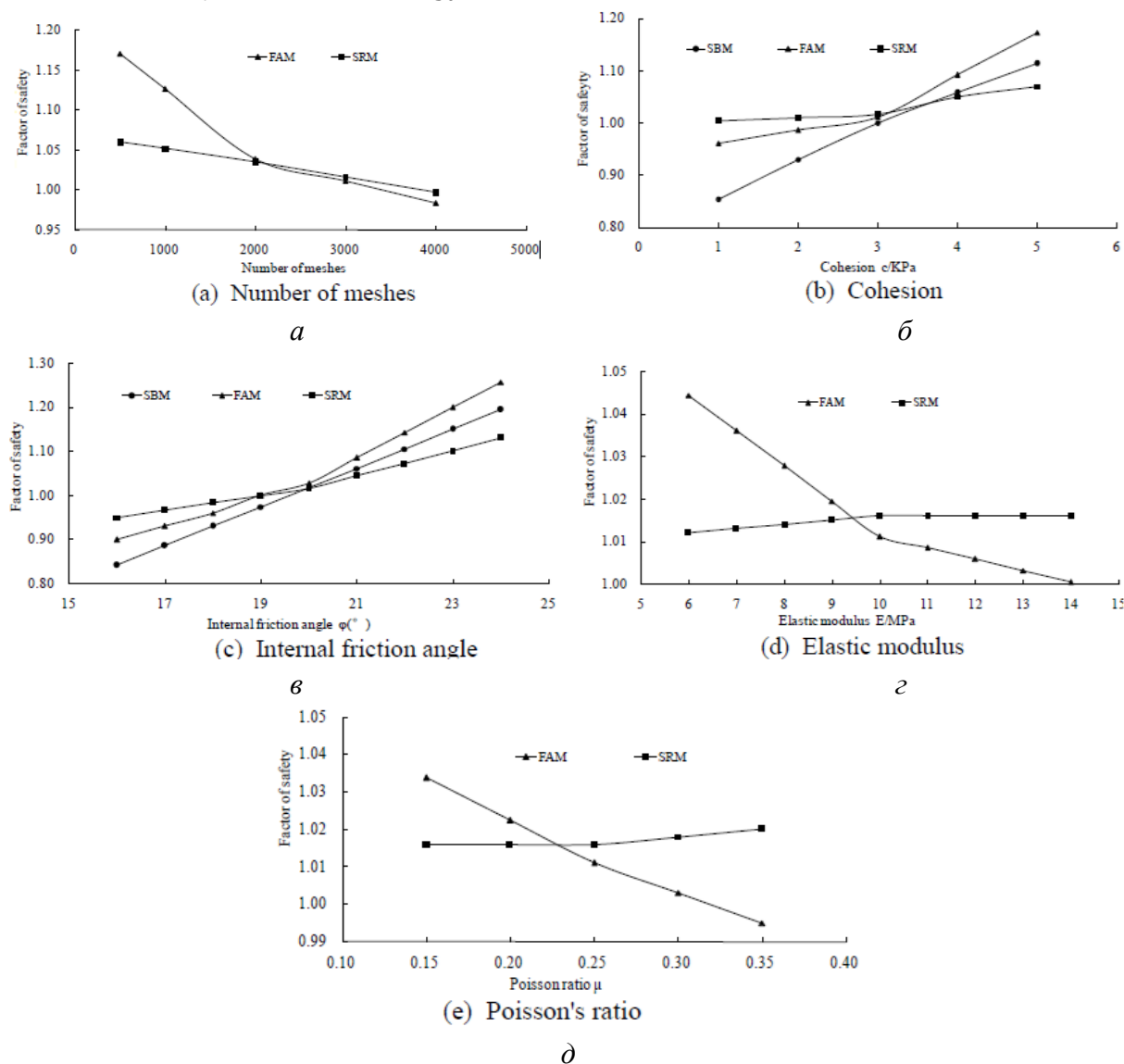


Рис. 11. Графические зависимости величины коэффициента запаса устойчивости:
 a — от количества элементов расчетной схемы $K_{st} = f(n)$; b — от сцепления $K_{st} = f(c)$; c — от угла внутреннего трения $K_{st} = f(\varphi)$; d — от модуля упругости $K_{st} = f(E)$; e — от коэффициента Пуассона $K_{st} = f(\mu)$ [18]

Посмотрим теперь как зависит величина коэффициента запаса устойчивости K_{st} исследуемого объекта, вычисленная при помощи компьютерной программы *FEA* [17], от численных значений переменных расчетных параметров, чье влияние исследуется в работе [18].

На рис. 12 в качестве примера изображены наиболее вероятные линии скольжения в грунтовом откосе, описанном в работе [18], при всех численных значениях переменных расчетных параметров таких же, что использованы в цитируемой работе, при том исключении, что в первом случае (см. рис. 12а) величина коэффициента Пуассона $\mu = 0,25$ (соответствует величине коэффициента бокового давления $\xi_0 = 0,333$) изменена на $\mu = 0,35$ ($\xi_0 = 0,528$) (см. рис. 12а), а во втором случае – величина сцепления $c = 3$ кПа изменена на $c = 5$ кПа (см. рис. 12б).

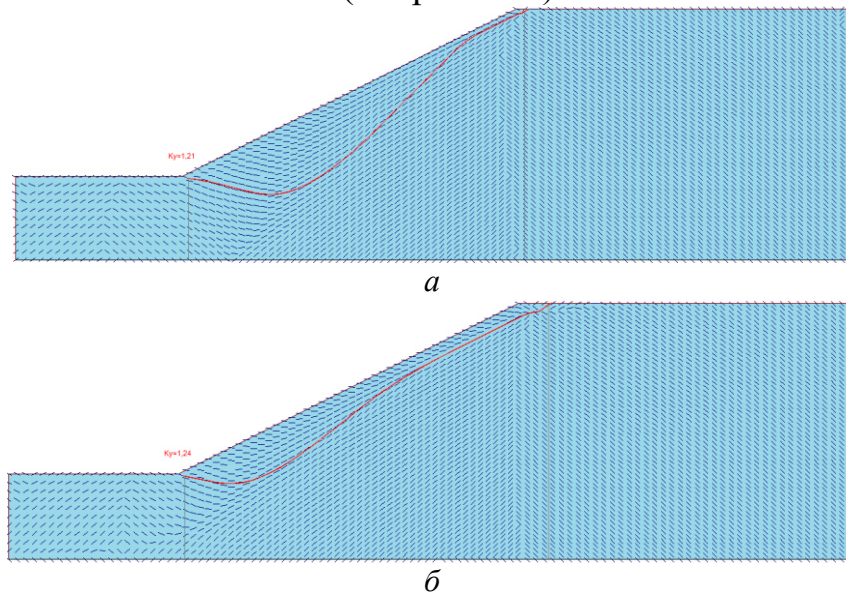


Рис. 12. Наиболее вероятные линии скольжения в грунтовом откосе, описанном в работе [18], при всех численных значениях переменных расчетных параметров (рис. 6, табл. 1), кроме (а) $\xi_0 = 0,538$ ($\mu = 0,35$) и (б) $c = 5$ кПа

Эти рисунки являются лишь небольшой частью тех, что построены на основе вычислений величины коэффициентов запаса устойчивости K_{st} при помощи компьютерной программы *FEA* [17], для тех диапазонов переменных расчетных параметров, что рассмотрены в работе [18]. (Отметим, что в случае *SBM* (рис. 10г) параметр n обозначает не количество элементов расчетной схемы, а количество блоков, на которые разбита призма обрушения). На рис. 13 отсутствует крива $K_{st} = f(E_o)$ так как напряжения в однородном массиве не зависят от модуля общей деформации, а величины перемещений не входят в формулу для вычисления величины коэффициента запаса. Графические зависимости, построенные по результатам этих вычислений, приведены на рис. 13. Напомним, что графические интерпретации результатов аналогичных расчетов, выполненных авторами [18], приведены на рис. 11.

На основе анализа графических зависимостей, изображенных на рис. 11 и рис. 13 построены диаграммы (см. рис. 14), по которым можно определить на сколько процентов изменяется величина K_{st} при расчете одним из методов, рассмотренных в настоящей статье, если величина того или иного

переменного расчетного параметра принимает сначала минимальное, а затем максимальное значение из диапазона его изменения, что использован авторами работы [18] при построении графических зависимостей, цитируемых нами на рис. 1, и сопоставительных расчетов, выполненных авторами настоящей статьи. При этом численные значения остальных параметров остаются такими, как показано на рис. 6, табл. 1.

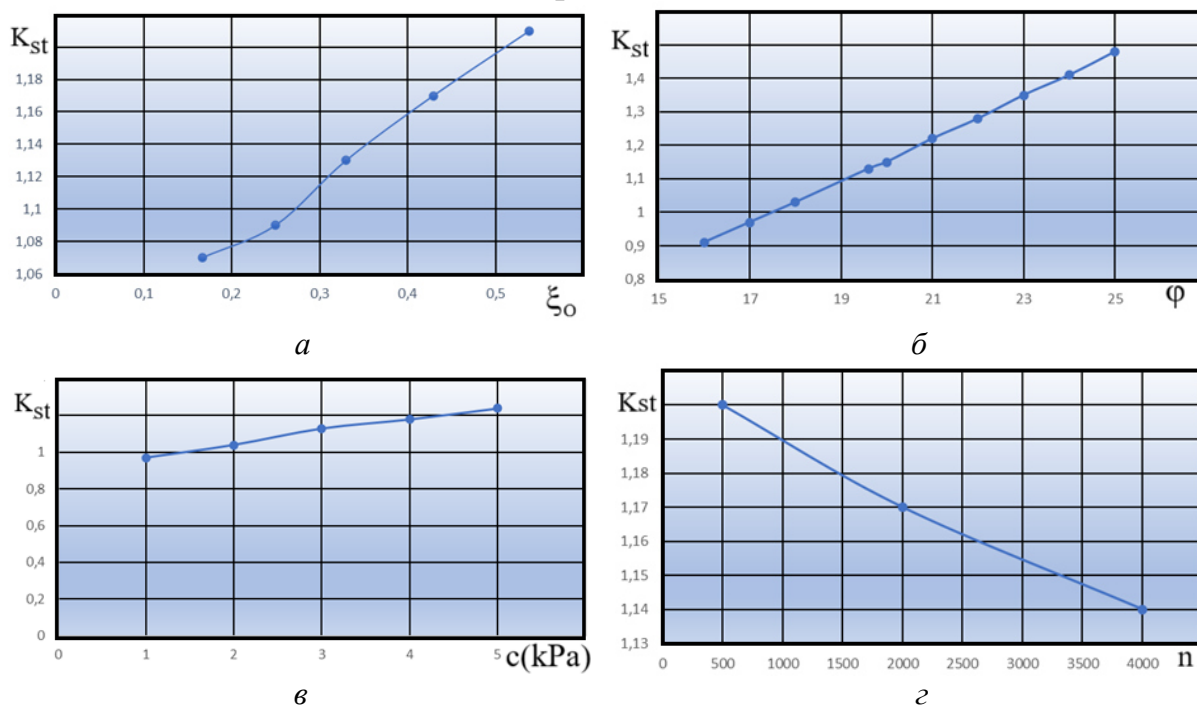


Рис. 13. Графические зависимости вида:

$a — K_{st} = f(\xi_0)$; $б — K_{st} = f(\varphi)$; $в — K_{st} = f(c)$; $г — K_{st} = f(n)$, построенные при помощи КП FEA [17] при условии, что все остальные переменные расчетные параметры сохраняют значения (рис. 6, табл. 1)

Обсуждение

Анализ результатов расчетов, выполненных при рассмотрении примеров 1 и 2, позволяет утверждать, что при использовании SRM [16; 18] и метода, основанного на анализе напряженного состояния грунтового массива [13–15], величина K_{st} зависит от прочностных и деформационных свойств грунта и степени дискретизации расчетной схемы МКЭ. Кроме того, очевидной является зависимость результатов МКЭ от размеров расчетной схемы и наложенных на нее граничных условий. Оценить степень влияния ФМС на получаемый результат можно на основе диаграмм, изображенных на рис. 14. Данные результаты являются логичными и закономерными, однако возникают вопросы в связи с весьма слабым откликом SRM на изменение значений деформационных характеристик E_0 и ξ_0 , хотя известно, что при упругой постановке задачи, перемещения находятся в прямой зависимости от величины модуля деформации. Из рис. 14г и 4д видно, что при более чем двукратном увеличении численных значений E_0 и μ (ξ_0) изменение

величины коэффициента запаса устойчивости K_{st} составляет 0,49 % и 0,3 % соответственно, что представляется странным на фоне того, что при использовании SRM численное значение K_{st} определяется величиной «коэффициента уменьшения прочности на сдвиг» $F_{sr} = R = K_{st}$, при котором наблюдается лавинообразный рост перемещений контрольных точек.

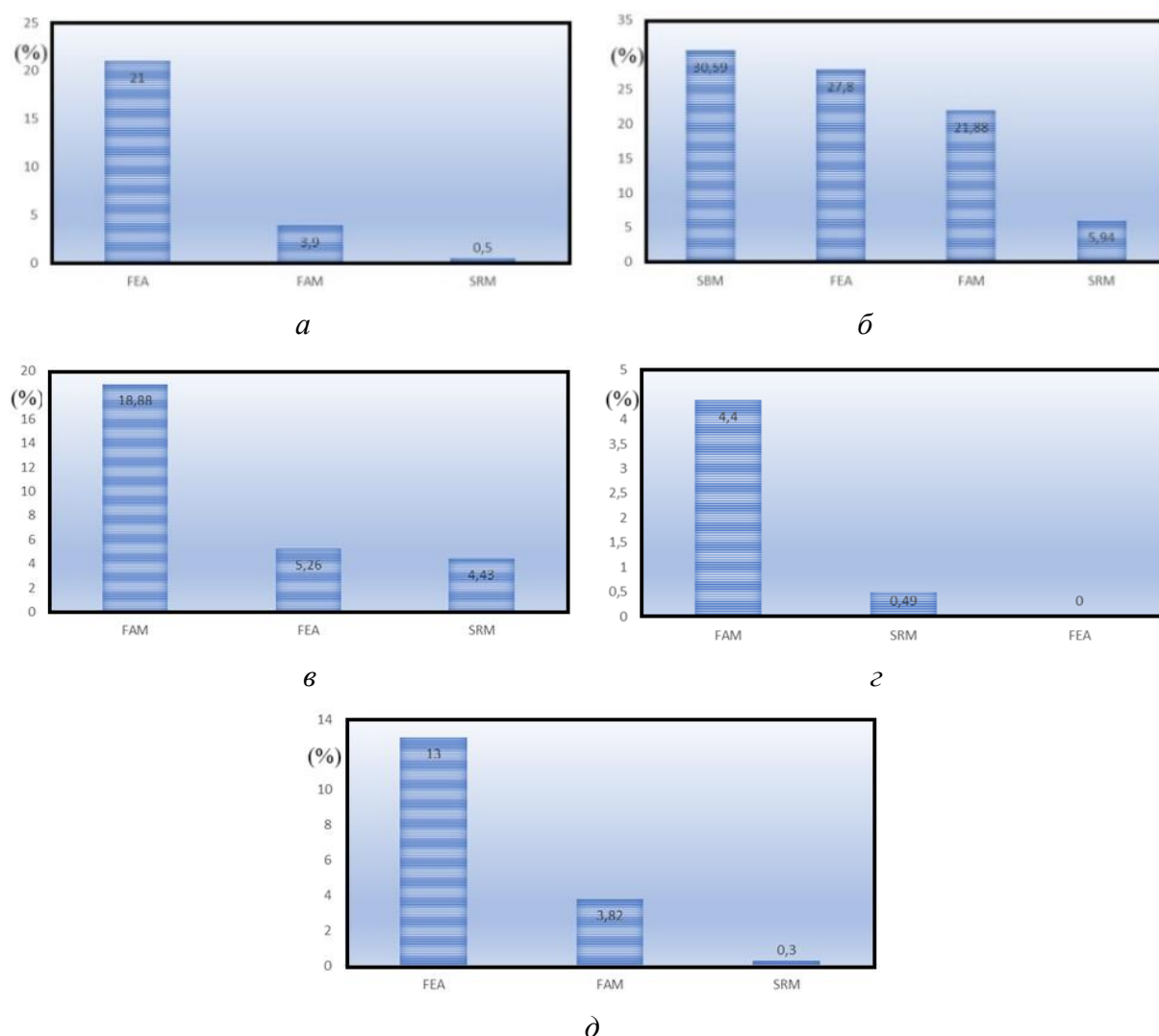


Рис. 14. Диаграммы влияния численных значений переменных расчетных параметров на величину K_{st} при расчете различными методами:

а — для угла внутреннего трения φ ; *б* — сцепления c ; *в* — количества элементов n ;

г — модуля общей деформации E_0 ; *д* — коэффициента бокового давления ξ_0 (коэффициента Пуассона μ)

Учитывая выше сказанное очевидным, является утверждение, что разным значениям E_0 соответствуют отличающиеся друг от друга значения и F_{sr} , и R , и, следовательно, и K_{st} . Количественную оценку этого влияния этой «связки» на величину K_{st} , по всей видимости, никто не проводил и не учитывал при проведении соответствующих расчетов.

Отметим еще одно, на наш взгляд, немаловажное обстоятельство. Во введении сказано, что использование *SRM* предусматривает постепенное равномерно и одновременное снижение сдвиговых характеристик слагающего грунта (формула (1)), но деформационные характеристики при этом остаются неизменными, хотя является очевидным, что данная процедура влечет за собой изменение жесткости грунтового массива, то есть изменение величин E_o и μ (ξ_o). Известно, что существует множество эмпирических и, полученных теоретическим путем, зависимостей между углом внутреннего трения и коэффициентом бокового давления грунта [19], некоторые из которых приведены в работах [20–24]. Кроме того, в общем случае для изотропной упругой среды справедливо равенство

$$E_o = \frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad (5)$$

которое для практического применения принимает вид

$$E_o \approx (1 - 2\mu)E. \quad (6)$$

Существует известное соотношение между коэффициентом Пуассона и коэффициентом бокового давления $\mu = \frac{\xi_o}{1+\xi_o}$, которое позволяет записать выражение, устанавливающее формальную связь между коэффициентом бокового давления и модулем общей деформации. Подставив это соотношение в формулу (5) и упростив полученное выражение, получим

$$E_o = E[(1 + 2\xi_o)(1 - \xi_o)]^{-1} \quad (7)$$

Анализируя равенство (7), можно сделать заключение, что изменение величины угла внутреннего трения, влекущее за собой изменение величины коэффициента бокового давления ξ_o , влечет за собой изменение величины модуля общей деформации E_o . Это понятно и с физической точки зрения — чем больше ξ_o , тем больше боковое расширение грунта при действии вертикальной нагрузки, тем, следовательно, больше его пластичность и меньше модуль упругости, а, значит, и модуль общей деформации. Возвращаясь к тому, что сказано выше, можно утверждать, что изменение деформационных характеристик грунтового массива и, следовательно, его жесткости, вызванное изменением прочностных характеристик грунта, должно оказывать влияние на величину коэффициента запаса устойчивости откоса. Количественная оценка этого влияния, как и в предыдущем случае, не установлена.

И последнее, о чем необходимо сказать. Когда мы рассчитываем осадки фундаментов, мы трепетно относимся к вопросу о назначении размеров расчетной схемы и назначаем ее вертикальный размер равным мощности сжимаемой грунтовой толщи. Если мы этого не сделаем, то при расчете получим заведомо не верные результаты. Когда мы используем *SRM* в привязке к методу конечных элементов, мы не задумываемся о том, какими должны быть назначены размеры расчетной схемы и степень ее дискретизации, какие граничные условия необходимо наложить, хотя известно, что от

этого зависят как величины напряжений, так и величины перемещений, получаемые в результате численного расчета. Вопрос этот очень важен, так как именно величины напряжений и перемещений определяют, в конечном итоге, численное значение коэффициента запаса устойчивости. Нельзя не сказать здесь о граничных условиях, накладываемых на расчетную схему. Влияние граничных условий, накладываемых на ее вертикальные границы, может быть нивелировано горизонтальным размером РС. Для назначения вертикального размера необходимо, наверное, разработать некую процедуру. По всей видимости, и эти вопросы не отрабатываются при использовании *SRM* при расчете устойчивости откосов.

Заключение

Использование методов *SRM*, [13–15], основанных на анализе напряженно-деформированного состояния грунтового массива, для расчета устойчивости откосов дают в рассмотренных случаях для условий рассмотренных примеров установлено, что изменение физико-механических свойств слагающих грунтов оказывает влияние на рассчитываемую величина коэффициента запаса устойчивости однородных и слоистых откосов, как при совместном использовании *SRM* и МКЭ, так и метода, основанного на анализе НДС грунтового массива [13–15]. Использование *SRM* предусматривает поэтапное снижение расчетных значений сцепления и тангенса угла внутреннего трения, но при этом неизменными остаются значения деформационных характеристик грунта, что противоречит происходящему виртуальному процессу изменения жесткости грунтового массива (после снижения прочностных характеристик, по сути, будет другой объект).

Оставление без внимания этого обстоятельства может оказать влияние на степень достоверности результатов, получаемых на основе *SRM*. В пользу этого утверждения говорят результаты расчетов величины F_{st} при помощи компьютерной программы *FEA* [17] методом [13–15] с использованием процедуры *SRM*, но с пересчетом величины коэффициента бокового давления грунта ξ_0 на каждом этапе уменьшения расчетного значения $\text{tg}\varphi$. Вычисления показали, если учесть изменение жесткости грунтового массива, обусловленное изменением только коэффициента бокового давления грунта, то разница численных значений коэффициентов запаса устойчивости, вычисляемых при помощи КП *FEA*, по сравнению со случаем расчета при фиксированном значении ξ_0 составляет 5,4 % и 19,29 % в зависимости от формулы, по которой производится перерасчет величины коэффициента бокового давления. Однако вычислительные процедуры, выполняемые при использовании *SRM* и других методов, не предусматривают каких-либо действий, позволяющих учесть эти обстоятельства.

Следовательно, существует необходимость проведения дополнительных исследований с целью определения степени влияния перечисленных выше факторов на результаты вычислений коэффициентов запаса устойчивости методами, основанными на численном анализе напряженно-деформированного состояния приоткосной области, в частности, SMR. Если количественная оценка этого влияния покажет, что оно является существенным, то необходимо будет вносить изменения или дополнения (корректировки) в вычислительную процедуру.

Список источников

1. Чугаев Р. Р. Проблемы Волго-Каспия / Р. Р. Чугаев // Труды Ноябрьской сессии 1933 г. АН СССР. – Л.: Издательство Академии наук СССР, 1934. – Т. 1. – 628 с.
2. Чугаев, Р. Р. Расчет устойчивости земляных откосов и бетонных плотин на не скальном основании по методу круглоцилиндрических поверхностей обрушения / Р. Р. Чугаев. – Москва; Ленинград: Госэнергоиздат, 1963. – 144 с.
3. Coulomb C. A. Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs, a la architecture // Mem. Acad. Roy. Div. Sav. – 1776. – Vol. 7. – Pp. 343–387.
4. Coulomb C. A. Application des riles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a Larchitecture // Memories de savants strangers de LAcademiie des sciences de Paris. – 1773. – 233 pp.
5. Zienkiewicz O.C., Humpheson C., Lewis R.W. (1975) Associated and nonassociated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. *Geotechnique* 25(4):671-689.
6. Diederichs M.S., Lato M., Hammah R.E. and Quinn P. 2007. Shear Strength Reduction approach for slope stability analysis. In *Proceedings of the 1st Canada–U.S. Rock Mechanics Symposium, Vancouver, B.C.* pp. 319–327.
7. Duncan J.M. and Chang C.Y. (1970) : «Nonlinear analysis of stress and strain in soils», *Soil Mech. and Found. Eng. Div., AS CE*, Vol. 96, No. SM 5, pp. 1629-1653
8. Matsui T., & San K.-C. (1992). Finite Element Slope Stability Analysis by Shear Strength Reduction Technique. *Soils and Foundations*, 32, pp. 59-70.
9. Xu W.Y., Xiao W. (2007): Study on slope failure criterion based on strength reduction and gravity increase method. *Rock and Soil Mechanics*. vol. 28(3), pp. 505-511.
10. Bishop A.W. 1955. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes. *Géotechnique*, 5(1): 7–17. doi:10.1680/geot.1955.5.1.7.
11. Morgenstern N.R. and Price V. 1965. The analysis of the stability of general slip surface. *Géotechnique*, 15(1): 79–93. doi:10.1680/geot.1965.15.1.79.
12. Spencer E. 1967. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces. *Géotechnique*, 17(1): 11–26. doi:10.1680/geot.1967.1
13. Цветков В. К. Инженерные методы расчета устойчивости гидротехнических и дорожных сооружений / В. К. Цветков // Сборник статей. – Волгоград: Волгоградский политехнический институт, 1977. – С. 3-29.
14. Цветков, В. К. Расчет устойчивости откосов и склонов / В. К. Цветков. – Волгоград: Нижне-Волжское кн. из-во, 1979. – 238 с.
15. Богомолов А. Н. Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке / А. Н. Богомолов. – Пермь : ПГТУ, 1996. – 150 с.

16. Sarkar S., Chakraborty M. Stability analysis for two-layered slopes by using the strength reduction method. *Geo-Engineering* 12, 24 (2021). <https://doi.org/10.1186/s40703-021-00153-4>
17. FEA: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617889 / О. А. Богомолова и др.; зарег. 23 июля 2015 г.
18. Zhang Yu., Zhang Xiaodong, Zhao Hai-Bin, Jin Pei Jie. Research on the Critical Slope Stability Based on Two Practical Procedures. 2017 2nd International Conference on Mechatronics and Information Technology (ICMIT 2017). *Advances in Computer Science Research*. Vol. 70. Pp. 131-135.
19. Черняев В. Ф. К определению коэффициента бокового давления покоя / В. Ф. Черняев // Основания и фундаменты: сб. - Воронеж: ВИСИ, 1975. - № 2 – С. 79–93.
20. Jaky J. The coefficient of earth pressure at rest // *J. Soc. Hung. Archit. Eng.*, Budapest, 1944, vol. 78 (22), pp. 355-388.
21. Флорин В. А. Основы механики грунтов, т. 1. М. –Л.: Госстройиздат, 1959. – 360 с.
22. Hartmann F. Die berechnung des Ruhedruck in Rohasionslosen Boden bei waagerechter Oberfläche // *Bautechnik*, № 11, 1967.
23. Franke E. Ruhedruck in Rohasionslosen Boden in ebenen Fall // *Bautechnik*, №2, 1967.
24. Berger Y. Der Ruhedruck in der Praxis // *Bauingeniering*, № 3, 1966.
25. К вопросу о минимальных значениях коэффициента бокового давления грунтов / А. Н. Богомолов и др. / Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Естественные науки. - Волгоград: Изд-во ВолгГАСУ, 2007. – Вып. 6 (23). С. 6-10.
26. Mayne P. W., Kulhawy F. H. (1982): Ko-OCR Relationships in Soil, *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 108, pp. 851 – 872.

© Богомолов А. Н., Богомолова О. А., Богомолов С. А., Редин А. В., 2026